14/05/18

Συναρτήσεις Green για το πρόβλημα Sturm-Liouville

Θεωρώ το ΠΣΤ

(E): $Ly = \frac{d}{dt}\left(p(t) \frac{dy}{dt}(t) \right) + q(t)y(t) + \lambda r(t)y(t) = f(t)$

με τις συνθήκες:

$B_1)\ c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0, \quad |c_1|+|c_2|>0$

$B_2)\ d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0, \quad |d_1|+|d_2|>0$

Έστω y_1 μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς (E_0) η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη B_1 και $y_1 \neq 0$ η οποία δεν ικανοποιεί την B_2.
Έστω y_2 μια λύση της (E_0) η οποία ικανοποιεί μόνο τη B_2 και $y_2 \neq 0$.

Οι y_1 και y_2 είναι γ.α λύσεις της ομογενούς. Διότι εάν αυτό δεν ισχύει τότε $\exists (k_1, k_2) \neq (0,0)$ τ.ω. $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$
Έστω ότι $k_1 \neq 0 \Rightarrow y_1(t) = -\frac{k_2}{k_1} y_2(t), \forall t$

Εφόσον η y_1 ικανοποιεί τη B_1:
$c_1 y_1(a) + c_2 y_1'(a) = 0 \Longrightarrow$
$-\frac{k_2}{k_1}$

$c_1\left(-\frac{k_2}{k_1}y_1(a)\right)+c_2\left(-\frac{k_2}{k_1}y_1'(a)\right)=0$ άρα και η y_2 ικανοποιεί τη B_2 άτοπο

Άρα y_1, y_2 γ.α

Έπεται ότι είναι γ.α:

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t$$

Αναζητούμε λύσεις της (Ε0) που ικανοποιούν τις συνθήκες

$c_1 y(a)+c_2 y'(a)=0$

$d_1 y(b)+d_2 y(b)=0$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(t)=A(t)y_1(t)+B(t)y_2(t)$ όπου A, B πρέπει να προσδιορίσουμε

Με παραγώγιση: $y'(t)=A'(t)y_1(t)+A(t)y_1'(t)+B'(t)y_2(t)+$
$+B(t)y_2'(t)$

προκειμένου να μην εμφανίζονται παράγωγοι 2ης τάξης στις A και B επιλέγουμε: $A'(t)y_1(t)+B'(t)y_2(t)=0$ (Δ)

τότε:

$y'(t)=A(t)y_1'(t)+B(t)y_2'(t)$

οπότε με αντικατάσταση των y και y' στη ΔΕ:

$$Ly=\frac{d}{dt}\left(p(t)\left(A(t)y_1'(t)+B(t)y_2'(t)\right)\right)+(q(t)+\lambda r(t))\cdot$$
$$\left(A(t)y_1(t)+B(t)y_2(t)\right)=f(t) \quad \text{οπότε}$$

$$A(t)\left(\frac{d}{dt}[p(t)y_1'(t)]+(q(t)+\lambda r(t))y_1(t)\right)+$$

$$+B(t)\left(\frac{d}{dt}[p(t)y_2'(t)]+[q(t)+\lambda r(t)y_2(t)]\right)+$$

$$+A'(t)p(t)y_1'(t)+B'(t)+p(t)y_2'(t)=f(t) \quad (\forall *)$$

Άρα y_1, y_2 λύσεις της (Σ0) οπότε

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)y_1'(t)\right)+\left(q(t)+\lambda r(t)\right)y_1(t)=0$$

και

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)y_2'(t)\right)+\left(q(t)+\lambda r(t)\right)y_2(t)=0$$

Άρα από τη (**) έχω:

$$A'(t)p(t)y_1'(t)+B'(t)p(t)y_2'(t)=f(t)$$

$$p(t)\left(A'(t)y_1'(t)+B'(t)y_2'(t)\right)=f(t)$$

$$A'(t)y_1'(t)+B'(t)y_2'(t)=\frac{f(t)}{p(t)} \quad (p(t)>0) \quad \Delta\Delta$$

Από τη Δ και τη ΔΔ λύνοντας το σύστημα θα βρω τα A, B:

$$B'(t)=\frac{f(t)\,y_1(t)}{p(t)w(t)}$$

και

$$A'(t)=-\frac{f(t)y_2(t)}{p(t)w(t)}$$

$$\cdot\left[p(t)w(t)\right]'=\left[p(t)\left(y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)\right)\right]'=$$

$$=y_1(py_2')'-y_2(py_1')' \quad ①, \quad y_1, y_2 \text{ λύσεις της (Σ0)}$$

άρα

$$\left(p(t)y_1'(t)\right)'=-(q+\lambda r)y_1(t)$$

$$\left(p(t)y_2'(t)\right)'=-(q+\lambda r)y_2(t)$$

οπότε: (από την ①)

$$\left(p(t)w(t)\right)'=y_1\left(-(q+\lambda r)y_2\right)-y_2\left(-(q+\lambda r)y_1\right)=0$$

Scanned by CamScanner

Άρα: $p(t)w(t)=c \ \forall t$ ($c\neq 0$ διότι $p(t)>0$ και $w(t)\neq 0$)

$B'(t) = \frac{f(t)y_1(t)}{c}$, $A'(t) = -\frac{f(t)y_2(t)}{c}$

Με ολοκλήρωση θα βρω τα A, B:

- $\int_b^t A'(s)ds = -\int_b^t \frac{f(s)y_2(s)}{c} ds$

ή

$A(t) - A(b) = -\int_b^t \frac{f(s)y_2(s)}{c} ds$ (1)

- $\int_a^t B'(s)ds = \int_a^t \frac{f(s)y_1(s)}{c} ds$

ή

$B(t) - B(a) = \int_a^t \frac{f(s)y_1(s)}{c} ds$ (2)

Εφόσον θέλουμε η y να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες άρα $0 = c_1 y(a) + c_2 y'(a) = c_1 [A(a)y_1(a) + B(a)y_2(a)] + c_2(A(a)y_1'(a) + B(a)y_2'(a)) =$
$= A(a)\underbrace{(c_1 y_1(a) + c_2 y_1'(a))}_{=0} + B(a)(c_1 y_2(a) + c_2 y_2'(a))$

Άρα $B(a)(c_1 y_2(a) + c_2 y_2'(a)) = 0 \Rightarrow \boxed{B(a)=0}$

η y_2 δεν ικανοποιεί την B_1

Όμοια: Εφόσον y ικανοποιεί τη συνθήκη B_2

$0 = d_1 y(b) + d_2 y'(b) = A(b)(d_1 y_1(b) + d_2 y_1'(b)) +$
$B(b)\underbrace{(d_1 y_2(b) + d_2 y_2'(b))}_{=0} \Rightarrow A(b)(d_1 y_1(b) + d_2 y_1'(b)) = 0$

$\Rightarrow \boxed{A(b)=0}$ Άρα από τις (1) και (2):

$A(t) = -\int_b^t \frac{f(s)y_2(s)}{c} ds$, $B(t) = \int_a^t \frac{1}{c} f(s) y_1(s) ds$

τελικώς

$y(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t) = -y_1(t)\int_b^t \frac{f(s)y_2(s)}{c} ds$

$+ y_2(t)\int_a^t \frac{f(s)\ y_1(s)}{c} ds = \int_a^t \frac{1}{c} y_2(t) y_1(s) f(s) ds$

$+ \int_t^b \frac{1}{c} f(s) y_2(s) y_1(t) ds$. Άρα

$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds$ όπου

$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} y_2(t) y_1(s), & s \le t \quad \leftarrow G_1(t,s) \\ \frac{1}{c} y_1(t) y_2(s), & t \le s \quad \leftarrow G_2(t,s) \end{cases}$

Ιδιότητες:

1) Η $G(t,s)$ είναι συμμετρική $G(t,s) = G(s,t)$

2) Η G ως συνάρτηση του t ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες (διότι y_1 ικανοποιεί την B_1 οπότε για $t=a$ $G(a,s) = \frac{1}{c} y_1(a) \cdot y_2(s)$ και

$\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{c} y_1'(t) y_2(s)$ και $\left.\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}\right|_{t=a} =$

$= \frac{1}{c} y_1'(a) \cdot y_2(s)$

οπότε $c_1\left(\frac{1}{c} y_1(a) y_2(s)\right) + c_2\left(\frac{1}{c} y_1'(a) y_2(s)\right) =$

$= \frac{1}{c} y_2(s) \left(\underbrace{c_1 y_1(a) + c_2 y_1'(a)}_{=0} \right) = 0$

Όμοια η G_2 για $t=b$ ικανοποιεί τη συνθήκη B_2

3) Η G είναι συνεχής στο $[a,b] \times [a,b]$

4) Η $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ παρουσιάζει ασυνέχεια για $t=s$

Ισχύουν

$$\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{c} y_2'(t) y_1(s) -$$

$$-\frac{1}{c} y_1'(t) y_2(s) \quad \text{και} \quad \left[\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t} \right]_{t=s} = \frac{1}{c} \ldots$$

$$= \frac{1}{p(s) W(s)} \cdot W(s) = \frac{1}{p(s)}$$

5) Η G ως συνάρτηση του t ικανοποιεί την ομογενή ΔΕ $Ly=0$ για $t \neq s$ δηλ. $L\,G(t,s)=0$ $t \neq s$

Πράγματι, εφόσον $G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} y_1(t) y_2(s), & a \le t \le s \le b \\ \frac{1}{c} y_2(t) y_1(s), & a \le s \le t \le b \end{cases}$

εάν $t<s$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t) \frac{d}{dt} G(t,s) \right) + q(t) G(t,s) + \lambda r(t) G(t,s)$$

$$= \frac{d}{dt}\left\{ p(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c} y_1(t) y_2(s) \right) \right\} +$$

$$(q(t) + \lambda r(t)) \left(\frac{1}{c} y_1(t) y_2(s) \right) =$$

$$= \frac{1}{c} y_2(s) \left[\frac{d}{dt}\left(p(t) \frac{d}{dt} y_1(t) \right) + (q(t) + \lambda r(t)) y_1(t) \right]$$

$$= \frac{1}{c} y_2(s) \cdot 0 = 0$$

Όμοια και για $s<t$ η G_2 ικανοποιεί την ομογενή ΔΕ

Ορισμός: Μια συνάρτηση $G(t,s)$ ορισμένη στο $[a,b]\times[a,b]$ λέγεται συνάρτηση Green για το ΠΣΤ $Ly=(py')'+qy=0$ υπό τις συνθήκες

(B1): $c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0$
(B2): $d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0$

αν: $G(t,s) = \begin{cases} G_1(t,s), & a \le t \le s \le b \\ G_2(t,s), & a \le s \le t \le b \end{cases}$

όπου G_1, G_2 είναι τ.ω.:

① η G_1 ικανοποιεί τη συνθήκη B1 για $t=a$ και η G_2 ως συνάρτηση του t ικανοποιεί την εξίσωση $L(G_1)=0$ για $t<s$

② η G_2 ικανοποιεί τη συνθήκη B2 για $t=b$ και η $L(G_2)=0$ για $t>s$

③ Η G είναι συνεχής για $t=s$

④ Η παράγωγος $\frac{\partial G}{\partial t}$ είναι ασυνεχής για $t=s$

$$\left[\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}\right]_{t=s} = \frac{1}{p(s)}$$

• Το γεγονός ότι η G_1 και G_2 ικανοποιούν την εξίσωση ΔΕ (για $t<s$ ή για $s<t$) με βοηθά στον προσδιορισμό τους. Εάν βρω y_1, y_2 Γ.Α. λύσεις $Ly=0$ τότε $G_1(t,s) = c_1(s)y_1(t)$

τότε: $\boxed{G_1(t,s) = c_1(s)y_1(t) + c_2(s)y_2(t)}$

και $\boxed{G_2(t,s) = d_1(s)y_1(t) + d_2(s)y_2(t)}$

Στόχος και ο προσδιορισμός των c_1, c_2, d_1, d_2

Για το πρόβλημα αυτό απαιτώ οι G_1, G_2 να έχουν τις ιδιότητες που θέλω, υπάρχουν και τις προϋποθέσεις

Άσκηση Να βρεθεί η συνάρτηση Green για ΠΣΤ

$$y''(t)=0$$

B_1 $y(a)=0$ $\quad a<t<b$

B_2 $y(b)=0$

Είναι της μορφής $Ly=(py')'+qy=0$, $p(t)=1>0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $\boxed{k^2=0}$ και ΒΣΛ: $\{e^0, t e^0\}$

Άρα:

$$G(t,s)=\begin{cases} c_1(s)t+c_2(s)1, & a\le t\le s\le b \\ d_1(s)t+d_2(s)1, & a\le s\le t\le b \end{cases}$$

Βήμα 1ο: Η G_1 ικανοποιεί την B_1 για $t=a$ δηλαδή:

$$c_1(s)\cdot a+c_2(s)\cdot 1=0 \Rightarrow \boxed{c_2(s)=-a\cdot c_1(s)}$$

Επίσης η G_2 ικανοποιεί την B_2 για $t=b$

$$d_1(s)b+d_2(s)=0 \Rightarrow \boxed{d_2(s)=-d_1(s)\,b}$$

οπότε η G παίρνει τη μορφή:

$$G(t,s)=\begin{cases} c_1(s)(t-a), & t\le s & G_1(t,s) \\ d_1(s)(t-b), & s\le t & G_2(t,s) \end{cases}$$

Βήμα 2ο: Η G είναι συνεχής για $t=s$

$$\boxed{c_1(s)(s-a)=d_1(s)(s-b)} \quad (1)$$

Βήμα 3ο:

$$\left(\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t}-\frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}\right)_{t=s}=\frac{1}{p(s)}=1$$

δηλ $\boxed{d_1(s) - c_1(s) = 1}$ ②

Από ①, ② : ... $\boxed{\begin{aligned} c_1(s) &= \frac{s-b}{b-a} \\ d_1(s) &= \frac{s-a}{b-a} \end{aligned}}$

Άρα:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{s-b}{b-a}(t-a), & t \le s \\ \frac{s-a}{b-a}(t-b), & s \le t \end{cases}$$

άσκηση: Δίνεται το ακόλουθο ΠΣΤ

$$Lu = u'' + u = f(t), \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$u(0) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\uparrow B_1 \qquad \uparrow B_2$

Να βρεθεί τη συνάρτηση Green

Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ είναι: $u'' + u = 0$
που είναι της μορφής: $(p(t)u')' + q(t)u(t) = 0$
με $p(t) = 1 > 0$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $k^2 + 1 = 0$
$k_1 = i$, $k_2 = -i$ και ΒΣΛ: $\{e^0 \cos t, e^0 \sin t\}$
Εδώ:

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)\cos t + c_2 \sin t, & t \le s \quad G_1(t,s) \\ d_1(s)\cos t + d_2 \sin t, & s \le t \quad G_2(t,s) \end{cases}$$

Θέλουμε η G_1 να ικανοποιεί την B_1 για $t=0$:
$c_1(s)\cos 0 + c_2(s)\sin 0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1(s) = 0}$

Επίσης η G_2 ικανοποιεί την B_2 για $t = \frac{\pi}{2}$:
$d_1(s)\cos\frac{\pi}{2} + d_2(s)\sin\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{d_2(s) = 0}$

Άρα $G(t,s) = \begin{cases} c_2(s)\sin t, & t \le s \\ d_1(s)\cos t, & s \le t \end{cases}$

Βήμα 2ο.

G συνεχής για $t=s$:

$$\boxed{c_2(s)\sin s = d_1(s)\cos s} \quad (1)$$

Βήμα 3ο:

$$\left[\frac{\partial G_2(t,s)}{\partial t} - \frac{\partial G_1(t,s)}{\partial t}\right]_{t=s} = \frac{1}{p(s)} = 1$$

$$\boxed{d_1(s)\cdot\sin s + c_2(s)\cos s = -1} \quad (2)$$

(1), (2) ⇒ $d_1(s) = -\sin s$

$c_2(s) = -\cos s$

οπότε:

$$G(t,s) = \begin{cases} -\cos s \sin t, & t \le s \\ -\sin s \cos t, & s \le t \end{cases}$$

Άσκηση: Να λύσετε το ΠΣΤ $y''(t) + y(t) = \overbrace{(t+1)}^{f(t)}$ (E)

$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ (C)

μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Θεωρώ το αντίστοιχο ομογενές ΠΣΤ με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες $y''(t) + y(t) = 0$

$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Προσδιορίζω τη συνάρτηση Green (το βήμα πριν):

$$G(t,s) = \begin{cases} -\cos s \sin t, & t \le s \\ -\sin s \cos t, & s \le t \end{cases}$$

Αναζητώ λύση (W) του αντίστοιχου ομογενούς με τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$W''(t)+W(t)=0$$
$$W(0)=W\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1$$

Η χαρακτηριστική είναι: $k^2+1=0$

άρα $\{\cos t, \sin t\}$ ΘΣΛ

$$W(t)=k_1\cos t+k_2\sin t$$

Από τις συνοριακές συνθήκες

$W(0)=1 \Rightarrow \boxed{k_1=1}$

$W\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1 \Rightarrow \boxed{k_2=1}$

Άρα $w(t)=\cos t+\sin t$ οπότε η λύση του (G-c)

$$y(t)=w(t)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(t,s)\,f(s)\,ds=\cos t+\sin t+$$
$$+\int_0^t G(t,s)\,(s+1)\,ds+\int_t^{\frac{\pi}{2}} G(t,s)\,(s+1)\,ds=\dots$$